Krive drugog reda

Kanonski oblik krivih drugog reda

1) Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a>0, b>0, a \geq b)$

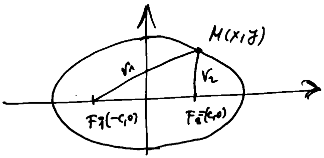
2) hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a>0, b>0$

3) parabola $y^2 = 2px$

4) par pravih koje se sijeku
$a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

5) par paralelnih pravih (ili prave koje se poklapaju)
$x^2 - a^2 = 0$, $a \geq 0$

1) Elipsa je skup tačaka, kod kojih je suma rastojanja od dvije date tačke F_1 i F_2 konstantna i jednaka $2a$



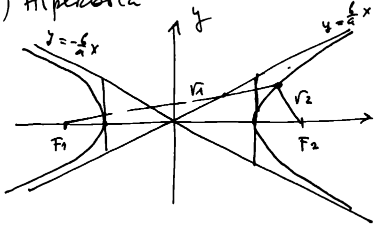
$c^2 = a^2 - b^2$

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ – ekscentricitet elipse

$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ fokusi ili žiže elipse

$r_1 + r_2 = 2a$, $a = b$ – kružnica $x^2 + y^2 = a^2$

2) Hiperbola



Tačke $(a,0)$ $(-a,0)$ vrhovi hiperbole

Hiperbola ne siječe osu Oy

$y = \pm \frac{b}{a} x$ asimptote hiperbole

$c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ekscentricitet hiperbole

$F_1 = (-c,0)$, $F_2 = (c,0)$ fokusi hiperbole

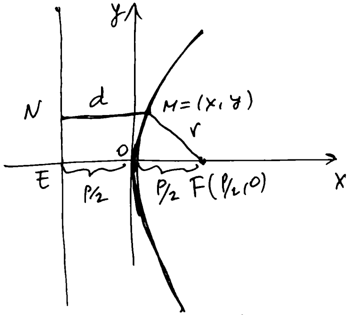
Skup tačaka iz ravni kod kojih je apsolutna veličina razlike rastojanja od tačaka F_1 i F_2 konstantna veličina i jednaka $2a$ je hiperbola.

3) <u>Parabola</u> $y^2 = 2px$

Tacke (x,y) i $(x,-y)$ pripadaju paraboli koje su simetricne u odnosu na X osu.

Tacka $(0,0)$ vrh parabole, Tacka $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ - fokus parabole

$r = |MF|$ – fokalni radijus tacke $M = (x,y)$ parabole



Parabola je skup tacaka koje su podjednako udaljene od fiksirane tacke F i fiksirane prave $x = -P/2$ - tu pravu nazivamo direktrisom parabole.

4) $a \neq 0, b \neq 0$ $\quad a^2x^2 - b^2y^2 = 0 \iff (ax - by)(ax + by) = 0$

$\to$ ili je $ax - by = 0$ ili $ax + by = 0$

Opsta jednacina krivih drugog reda je

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ako je determinante $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \cdot \left.\begin{matrix} > 0 \text{ - elipsa} \\ < 0 \text{ - hiperbola} \\ = 0 \text{ parabola} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

Povrsi drugog reda. Cilindricne, konusne, Rotacione <u>povrsi.</u>

Skup tacaka $M = (x,y,z)$ cije koordinate zadovoljavaju jednacinu $F(x,y,z) = 0$ nazivamo povrsi u $\mathbb{R}^3$.
Kazemo da tacka $M = (x,y,z)$ lezi na povrsi (ili pripada povrsi) ako njene koordinate zadovoljavaju jednacinu povrsi $F(x,y,z) = 0$.

<u>Primjer</u>

$2x - 3y + 5z - 6 = 0$ $\to$ Ravan u prostoru $\mathbb{R}^3$

$F(x,y,z) = 2x - 3y + 5z - 6$ · jedna povrsi

Presjek dvije površi u prostoru obrazuje krivu u prostoru. Drugim riječima, skup tačaka koje zadovoljavaju uslov:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

obrazuje krivu u prostoru.

1. Sfera

Skup tačaka u prostoru koje su na rastojanju r $(r>0)$ od neke fiksne tačke $O(a,b,c)$ obrazuje površ koju nazivamo sferom ili sfernom površi.

Neka je $M(x,y,z)$ proizvoljna tačka sa sfere.

Znamo da je, $r = |MO| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$

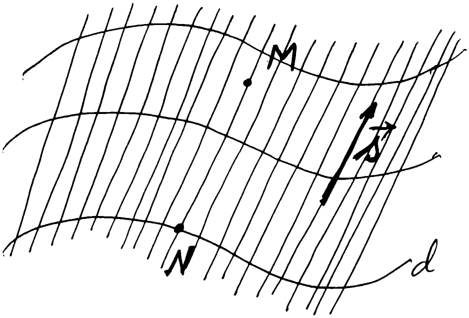
Odnosno, $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2}$ što i jeste jednačina sfere s centrom u $O(a,b,c)$ poluprečnika r.

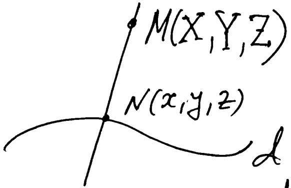
Specijalno, ako je $O(0,0,0)$ onda je $x^2+y^2+z^2=r^2$ jednačina sfere s centrom u $(0,0,0)$ poluprečnika r.

2. Cilindrične površi

Cilindrična površ u prostoru je skup tačaka svih pravih koje sijeku zadatu liniju L, a prave koje sijeku liniju (krivu) L su istovremeno paralelne datom fiksiranom vektoru $\vec{s}$.

Pravu paralelnu vektoru $\vec{s}$ nazivamo izvodnicom ili generatrisom, a zadatu liniju L vodiljom ili direktrisom.





$\vec{s} = (m, n, p)$

$$d: \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad \text{direktrisa}$$

Jednačina generatrise (prave paralelne vektoru $\vec{s}$) je:

$$\frac{X-x}{m} = \frac{Y-y}{n} = \frac{Z-z}{p} \quad \text{- generatrisa}$$

Iz parametarske jednačine generatrise izrazimo promjenljive x, y, z:

$$\begin{cases} x = X - mt \\ y = Y - nt \\ z = Z - pt \end{cases}$$

Zamijenimo u prvu jednačinu direktrise (prva površ):

$F_1(X-mt, Y-nt, Z-pt) = 0$. Odavde nađemo t.

Tada je $t = g(X,Y,Z)$. Vratimo vrijednost za t u parametarske jednačine generatrise, a zatim to novo x, y i z ~~za~~ uvrstimo u drugu jednačinu generatrise (druga površ):

$$F_2\big(X - mg(X,Y,Z),\ Y - n\cdot g(X,Y,Z),\ Z - pg(X,Y,Z)\big) = 0$$

što i jeste jednačina cilindrične površi

Primjer Naći jednačinu cilindrične površi čija je direktrisa $d: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$, a generatrisa $\vec{s} = (1,2,1)$.

Rješenje Jednačina generatrise je

$$\frac{X-x}{1} = \frac{Y-y}{2} = \frac{Z-z}{1} = t$$

Parametarske jednačine po x, y, z:

$$\begin{cases} x = X - t \\ y = Y - 2t \\ z = Z - t \end{cases}$$

Zamijenimo ovo u drugu jednačinu direktrise $x + y + z - 3 = 0$:

$$X - t + Y - 2t + Z - t - 3 = 0$$

Odavde izrazimo t po promjenljivim X, Y i Z:

$$t = \frac{1}{4}(X + Y + Z - 3)$$

Vratimo ovo u parametarske jednačine generatrise:

$$x = X - \frac{1}{4}(X+Y+Z-3) = \frac{1}{4}(3X - Y - Z + 3)$$

$$y = Y - \frac{1}{2}(X+Y+Z-3) = \frac{1}{2}(-X + Y - Z + 3)$$

$$z = Z - \frac{1}{4}(X+Y+Z-3) = \frac{1}{4}(-X - Y + 3Z + 3)$$

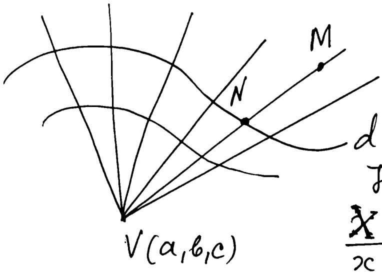
Zamijenimo x, y, z u prvu jednačinu direktrise i tako dobijamo jednačinu tražene cilindrične površi:

$z = x^2 + y^2 \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{4}(-X - Y + 3Z + 3) = \frac{1}{16}(3X - Y - Z + 3)^2 + \frac{1}{4}(-X + Y - Z + 3)^2}$$

3. Konusne površi

Konusna površ u prostoru je skup tačaka svih pravih koje prolaze kroz fiksiranu tačku V, koju nazivamo vrhom, a sijeku datu krivu d, koju nazivamo direktrisom.



$M(X,Y,Z)$
$N(x,y,z)$
$V(a,b,c)$

Jednačina prave VN:

$$\frac{X-a}{x-a}=\frac{Y-b}{y-b}=\frac{Z-c}{z-c}=t$$

$$d:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Iz parametarskih jednačina prave kroz tačke V i N dobijamo:

$$\begin{cases} x=\dfrac{X-a}{t}+a \\ y=\dfrac{Y-b}{t}+b \\ z=\dfrac{Z-c}{t}+c \end{cases}$$

Ovo uvrstimo u prvu jednačinu (prvu površ) direktrise

$$F_1\left(\frac{X-a}{t}+a,\ \frac{Y-b}{t}+b,\ \frac{Z-c}{t}+c\right)=0$$

Odavde nađemo $t=g(X,Y,Z)$ i zamijenimo sada x, y i z u jednačinu $F_2(x,y,z)=0$ i dobijamo jednačinu konusne površi:

$$F_2\left(\frac{X-a}{g(X,Y,Z)}+a,\ \frac{Y-b}{g(X,Y,Z)}+b,\ \frac{Z-c}{g(X,Y,Z)}+c\right)=0.$$

Primjer Naći jednačinu konusne površi čiji je vrh u tački $V(0,-1,0)$, a direktrisa kriva: 4

$$d: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y+z=1 \end{cases}$$

Rješenje Jednačina prave kroz tačke V i $N(x,y,z)$ je:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y+1}{y+1} = \frac{Z}{z} = t$$

Parametarski:

$$\begin{cases} x = \frac{X}{t} \\ y = \frac{Y+1}{t} - 1 \\ z = \frac{Z}{t} \end{cases}$$

Uvrstimo ovo u drugu jednačinu direktrise $y+z=1$:

$$\frac{Y+1}{t} - 1 + \frac{Z}{t} = 1 \quad / \cdot t$$

$$Y+1-t+Z = t$$

$$t = \frac{1}{2}(Y+Z+1)$$

Odavde je

$$x = \frac{2X}{Y+Z+1}$$

$$y = \frac{2Y+2-Y-Z-1}{Y+Z+1} = \frac{Y-Z+1}{Y+Z+1}$$

$$z = \frac{2Z}{Y+Z+1}$$

Zamijenimo x, y, z u ~~je~~ drugu jednačinu direktrise

$$\frac{4X^2}{(Y+Z+1)^2} + \frac{Y-Z+1}{(Y+Z+1)^2} + \frac{4Z^2}{(Y+Z+1)^2} = 1$$

Odnosno,

$$4X^2+(Y-Z+1)^2+4Z^2=(Y+Z+1)^2$$

Što i jeste jednačina konusne površi.